Convegno Internazionale “*Calcolo Matematico Precolombiano*”
Istituto Italo Latino Americano (*ILA*) *Piazza B. Cairoli, 3 Roma, 21 Ottobre 2003*

Abaco Inca e Nuove Architetture di Calcolo

(estratto dalla pubblicazione “*Calcolo Matematico Precolombiano”,* Bardi Editore)

di Maurizio Orlando

Sommario.
La decifrazione dell’Abaco Inca (De Pasquale, 2001) si presenta al nostro mondo scientifico come una realtà numerica straordinariamente diversa non solo dal sistema decimale basato sulla fisiologica e istintiva possibilità di disporre di 10 dita per far di conto, ma anche dal sistema binario, in grado di fornire automi di massima velocità con minima probabilità di errore e basso costo. Non deve sorprendere se per più di 400 anni dal primo contatto la nostra civiltà ha interpretato l’Abaco Inca in base 10 nonostante evidenti incongruenze incompatibili con una simile asserzione. Una sorta di “dogma decadico”, di “postulato numerico” sembra aver davvero ritardato il progredire della nostra conoscenza della cultura Inca. Ad un primo esame, questo sistema di numerazione in base 40 si distingue per caratteristiche peculiari degne di essere indagate per fare piena luce sul passato e, nel contempo, trarre preziose indicazioni nella ricerca di nuove e più efficienti architetture di calcolo. Anche recenti indagini, estese alle tecniche neurali, tendono infatti a superare il codice binario (M. Yacoub; V. Dimitrov; C. Frougny; A. Jullien) considerando sistemi di numerazione non pesati, basi multiple o basi variabili, con inaspettate quanto sorprendenti affinità con il sistema Inca; il punto di partenza della civiltà andina sembrerebbe coincidere con quello di arrivo del nostro mondo scientifico.
L’Abaco Inca (in forma di ”yupana”), presenta una caratteristica essenziale: le 40 combinazioni del codice sono ottenute mediante un particolare sistema di numerazione (basato sui primi termini della successione di Fibonacci e intrinsecamente ridondante) con i coefficienti definiti dal medesimo stato binario dei singoli "semi". Proprio questa peculiarità ha favorito la costruzione di una calcolatrice elettronica (per le operazioni aritmetiche fondamentali) come fedele riproduzione dell’abaco, sebbene basata su una scheda a microprocessore con segnali binari di ingresso e di uscita, corrispondenti allo stato dei singoli “semi”. Il software del dispositivo è stato implementato esclusivamente con appositi algoritmi dedotti dalla struttura stessa dell’abaco, con l’esclusione tanto dell’aritmetica binaria, quanto di quella decimale. Questo prototipo ha permesso così di approfondire la conoscenza del codice Inca, a stretto contatto con “pregi” e apparenti “non pregi” di tale sistema di numerazione. L’approccio iniziale ed il primo giudizio sono stati inevitabilmente “occidentali”, con tutti i condizionamenti derivati dall’assuefazione all’uso del nostro rigido sistema binario. Di conseguenza un notevole intralcio alla “fluidità” dei primi tentativi di sintesi è scaturito proprio dalla ridondanza del codice Inca che permette di scrivere un medesimo numero in più modi. Ma, ad una lettura più attenta e meno condizionata, questa caratteristica si è rivelata proprio come base di interessantissimi approfondimenti a partire dal metodo di "somiglianza" (da sfruttare ad esempio nella sottrazione e nella divisione) che dà una precisa risposta al perché gli Incas abbiano adottato tale sistema, fino ad una radicale rilettura della stessa ridondanza come "eccedenza di Qualità" (v. Giannantoni, 2002), per nuovi (o antichi) sistemi di numerazione e, più in generale, per nuove architetture di calcolo.

Premessa

Figura 1

La miniatura (fig. 1) che illustra l'Abaco Inca in forma di yupana ai piedi del Curaca, nel prezioso libro scritto nel 1615 da Guaman Poma Felipe de Ayala (*Nueva Corónica y Buen Gobierno* - Institut d'Ethnologie, Paris), è rimasta a disposizione degli studiosi fino dal 1936, ma ne è stata possibile una decifrazione coerente (De Pasquale, 2001) soltanto dopo circa 70 anni. Nasce spontanea una prima riflessione sui motivi di un ritardo non compatibile con le nostre conoscenze matematiche. Le precedenti ipotesi in chiave numerica erano state formulate su base decimale nonostante la presenza di 11 semi nella struttura elementare dell'abaco sia in netto contrasto con tale assunzione. E' immediato intuire che la base 40 non sia adeguata alle naturali tendenze numeriche dell'uomo atavicamente portato a ragionare con il pratico ausilio del suo "abaco" nativo a 10 dita. Proprio questa caratteristica fisiologica ha prodotto una sorta di "dogma decadico", di sottinteso postulato numerico istintivo secondo il quale uno strumento di calcolo dovrebbe inevitabilmente operare in base 10. L'ipotesi prospettata da De Pasquale sull'abaco Inca in un primo momento può risultare singolare, fantasiosa, illogica e incompatibile con le presunte minimali conoscenze matematiche dell'epoca, ma una successiva analisi dell'abaco fa rilevare evidenti e sorprendenti congruità strutturali con la nuova ipotesi. Ulteriori conferme provengono da scritti spagnoli di quel periodo storico il cui significato può ora finalmente essere chiarito (Acosta J. de, *Historia natural y moral de las Indias*, Libro VI, cap. VIII.).

Una verifica complementare incrociata di questa interpretazione potrebbe essere reperita in altre ipotesi di strumenti di calcolo sorprendentemente affini a quello Inca in base 40 come l'Abaco Egizio (De Pasquale 2003) e in particolare l'Abaco Maya in base 20 (cfr. De Pasquale, supra) per il quale l'illustrazione iconografica di una vera e propria lezione di matematica con maestro, allievo, problema assegnato e compito svolto, è talmente chiara da costituire più che un indizio. Questi abachi, pur essendo notevolmente differenti tra loro, risultano basati sul comune denominatore individuabile nella successione del pisano Leonardo Fibonacci e sembrano dimostrare che in quelle popolazioni il calcolo e la trascrizione dei risultati erano due eventi talmente diversificati da richiedere addirittura sistemi di numerazione separati e distinti. Come noto infatti gli Incas, tramite un sistema di cordicelle annodate, memorizzavano i numeri in base 10 nei "quipus" che certamente non erano adatti a risolvere problemi di calcolo a causa dell'evidente difetto di praticità operativa (cfr. Aimi, supra). Ci troviamo quindi di fronte ad una precisa scelta ragionata perché operare in basi diverse rende necessarie operazioni supplementari di conversione che non sarebbero giustificate senza l'esistenza di concreti vantaggi in sede computazionale. Da sottolineare che anche la nostra civiltà effettua precise scelte in questo senso servendosi di molteplici basi a seconda della convenienza seguendo le più elementari regole di opportunità. Infatti abbiamo un mondo numerico fisiologico in base 10, un mondo di elaborazione automatica in base binaria a causa di una lunga serie di vantaggi in termini di velocità, affidabilità, basso tasso di errore, massima tolleranza ai disturbi e massima economicità, utilizziamo basi elevate con simboli alfanumerici per minimizzare il numero di cifre per le targhe veicolari. Mettiamo da parte il codice decimale tutte le volte che ci sia una concreta convenienza.

Domande e risposte

Quali sono allora gli interrogativi del nostro mondo scientifico di fronte a queste novità? Il primo dovrebbe riguardare lo studio delle motivazioni per le quali gli Incas erano stati indotti ad utilizzare un sistema di numerazione marcatamente "non fisiologico" per eseguire i conti. In secondo luogo, in un realismo più spontaneo, ci si dovrebbe interrogare sulle reali possibilità di costruire nuove architetture di calcolo più veloci ed efficienti, ispirandosi al modello Inca, con la ricerca e l'utilizzo

di quei “vantaggi” che hanno determinato una scelta tanto precisa e originale. Nella difficile ricerca di una risposta efficace a questi quesiti e allo scopo di superare l’impatto con la struttura, le caratteristiche e le potenzialità di questo sistema di calcolo, è stata costruita la calcolatrice Atahualpa per le 4 operazioni aritmetiche fondamentali (Orlando, 2002) come fedele riproduzione dello stesso abaco. In particolare gli algoritmi sono stati sintetizzati a partire dalle deduzioni ricavate dall’utilizzo concreto della “yupana” ignorando, per quanto possibile, i condizionamenti storici derivati dalla nostra matematica. La strada più semplice nella realizzazione sarebbe stata quella di costruire un dispositivo per acquisire le informazioni in ingresso in forma Inca, convertirle in codice binario, eseguire i calcoli sfruttando le consolidate e disponibili architetture digitali in base 2, visualizzando infine il risultato ancora in forma Inca dopo aver effettuato la conversione. Ma in questo modo si sarebbe solo realizzata una emulazione non aderente all’architettura andina e quindi non significativa ai fini della ricerca. La calcolatrice, pur essendo totalmente elettronica e costruita con tecnologia digitale, realizza un modello aderente sia in hardware che in software all’architettura Inca e costituisce un primo elemento di esplorazione e significativo punto di contatto tra due civiltà.
Queste pagine vogliono, tra l’altro, raccontare questa ricerca e questo “incontro” tra il nostro mondo e quello andino, due realtà così lontane nel tempo e nello spazio e che ora paradossalmente e indipendentemente sembrano convergere proprio nella successione di Fibonacci. Infatti recentissime ricerche (M. Yacoub; V. Dimitrov; C. Frougny; A. Jullien), come si vedrà più avanti, stanno esplorando la stessa successione come base di nuovi sistemi di numerazione da utilizzare nelle architetture di calcolo. Quello che potrebbe essere per l’occidente un punto di arrivo, rappresenta un punto di partenza per la Civiltà Incaica.

Condizionamenti

Nel percorso di questa sorta di esplorazione matematica e informatica ci sembra doveroso far menzione dell’influenza epistemologica soggettiva, non soltanto prodotta dall’esistere del decimale, ma anche da quei molteplici nostri innati condizionamenti sui quali è bene riflettere per poter cogliere gli aspetti più significativi e profondi dell’Abaco Inca. Infatti gioca un ruolo primario anche il condizionamento binario dal momento che il nostro mondo elettronico-informatico opera in una realtà sempre più digitalizzata nella quale le caratteristiche e le qualità di tale sistema di numerazione sembrano praticamente insostituibili nella costruzione di automi sotto tutti i punti di vista, dalla velocità alla minima probabilità di errore, dall’affidabilità sino alla economicità delle soluzioni. Ma nel corso della sperimentazione del resto ancora in itinere, oltre a questi aspetti prettamente numerici, è emerso un terzo condizionamento ancora più radicato e “oscurante” dei primi due che sarà affrontato più avanti.

...omissis...

L’Abaco Inca

Nella descrizione della struttura di calcolo, è importante individuare pregi e difetti nell’ottica dell’architettura automatica piuttosto che manuale. L’Abaco Inca opera con 2 sistemi di numerazione, uno “globale” per l’individuazione completa del numero da rappresentare, ed uno “locale” valido per la definizione dei singoli coefficienti. Il sistema globale é un classico sistema di tipo posizionale pesato, ha per base 40 ed è quindi sintetizzabile con la notazione (1):

$$Num = \sum_{i=0}^{N-1} C_i \cdot 40^i$$

dove:
N = numero di cifre utilizzate (coincidenti con il numero di righe);
i = generica posizione (corrispondente ad una riga);
C_i = singolo coefficiente (da 0 a 39).

A differenza degli altri sistemi classici, nell'Abaco Inca le 40 combinazioni per la definizione dei coefficienti non sono rappresentate da 40 simboli, bensì mediante un particolare sotto-sistema di numerazione a 4 settori, che possiamo definire "locale", con pesi rispettivamente corrispondenti a unità, coppie, terne e cinquine secondo la successione di Fibonacci.
Secondo la forma canonica dell'abaco (fig. 1), ogni unità può essere assunta una sola volta, ogni coppia al massimo 2 e analogamente ogni terna 3 e ogni cinquina 5. Nello schema (fig. 5) è descritta questa struttura con il massimo coefficiente ottenibile (39=5×5+3×3+2×2+1).

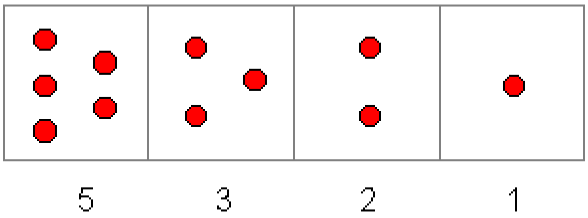

Figura 5

Se si aggiunge lo zero, rappresentato dalla mancanza di semi, si ottengono le 40 combinazioni totali della base. Ogni riga rappresenta nell'abaco un coefficiente che, seguendo la notazione precedente, sarà poi moltiplicato per la relativa potenza della base 40 in relazione alla sua posizione.
Anche nel sotto-sistema non sono definiti i simboli, ma sono indicati i sotto-coefficienti attraverso la presenza o l'assenza di singoli semi secondo un sistema di variabili a stato binario. Questa caratteristica favorisce notevolmente la digitalizzazione dell'abaco perché tanto gli ingressi quanto le uscite assumono il solo valore binario. E' bene tuttavia ricordare che, anche utilizzando tecnologie digitali per la costruzione di automi, si conserva intatta la struttura originale dell'abaco.
La scrittura di un generico coefficiente (C_i) può essere schematizzata con la seguente notazione (2):

$$C_i = CI \times 5 + TE \times 3 + CO \times 2^1 + UN \times 1^0$$

dove:
CI = cinquine, TE = terne, CO = coppie, UN = unità.

...Omissis...

La ridondanza

Continuando ad esaminare le caratteristiche della rappresentazione (codifica) dell'informazione del sistema di numerazione Inca, definendo con I gli elementi di informazione e C gli elementi del codice, bisogna distinguere tra i due sistemi prima descritti. Sia il sistema globale che quello locale sono completi (rappresentano tutti gli elementi), non ambigui (elementi distinti in I corrispondono ad elementi distinti in C), ma il sotto sistema locale risulta notevolmente ridondante essendo possibile scrivere uno stesso numero in più modi differenti. Per esempio una cinquina può essere rappresentata anche come una terna più una coppia, oppure con due coppie più una unità. Inoltre si potrebbero avere più possibilità per rappresentare coppie, terne e cinquine in quanto può essere assegnato un significato diverso ad ognuno degli elementi che li compongono. In altre parole per indicare ad esempio una sola terna si può scegliere uno dei 3 semi assegnando a ciascuno un significato diverso anche al di fuori della numerazione. Questa è una caratteristica fondamentale dell'Abaco Inca che da un lato costituisce una notevole complicazione ritenuta fortemente negativa dal nostro mondo informatico, ma dall'altro può aprire un vero e proprio filone di ricerca proprio in direzione dei significati della ridondanza. E' bene soffermarsi su questo punto

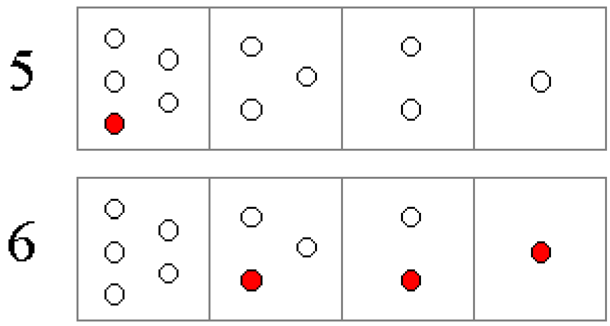

Figura 7

perché rappresenta una differenza sostanziale con gli altri sistemi di numerazione tanto che può rappresentare un bivio nella filosofia dell'elaborazione. La ridondanza rende alquanto contorti gli algoritmi anche nel caso di operazioni elementari e per questo nel nostro mondo "deve" essere evitata perseguendo l'obiettivo della massima efficienza. Un chiaro esempio sull'abaco riguarda la comparazione tra numeri come mostrato in figura 7. Come si vede il numero 5 ha cardinalità minore del numero 6 pur possedendo un coefficiente di peso più elevato. Di conseguenza l'algoritmo che si occupa della comparazione, procedendo da sinistra verso destra, deve esaminare tutto il numero prima di poter stabilire l'esito della comparazione mentre potrebbe arrestarsi alla prima cifra più significativa se non esistesse la ridondanza. L'algoritmo sarà così meno efficiente e il processo di calcolo verrà rallentato per la necessità di eseguire un numero di operazioni maggiore del necessario. Al contrario nel caso della base binaria o decimale tutto questo non avviene; possiamo infatti affermare che 90.000 è maggiore di 89.999 soltanto se si compara la cifra più significativa (ovviamente in caso di uguaglianza si procede verso destra arrestandosi al primo riscontro di maggioranza). Occorre tuttavia ricordare che nell'abaco la ridondanza riguarda solo il sistema di numerazione locale di riga, mentre quello globale non presenta questa caratteristica e possiede proprietà del tutto simili al nostro decimale tranne che per il valore della base.
Un lato negativo, infine, della ridondanza del codice locale si identifica con la scarsa economicità (numero di simboli mediamente utilizzati per un elemento di informazione). Infatti si ha un grande impiego di risorse con minore efficienza dal momento che sono impiegati 11 "bit" per la rappresentazione delle 40 combinazioni (il termine bit in realtà può essere usato a proposito dato lo stato binario dei semi anche se ovviamente non siamo in base 2). Lo stesso codice binario, a parità di numero di bit impiegati, rappresenta 2.048 combinazioni (2^{11}). In senso globale invece, data la grande potenzialità della base 40, l'abaco consente di trattare grandi numeri con relativa semplicità.

...Omissis...

La somiglianza

Proprio affrontando la divisione emerge un primo vantaggio che in realtà poteva essere sfruttato già a partire dalla sottrazione se l'espediente del complemento alla base non avesse "oscurato" le ricerche. Infatti in riferimento alla sottrazione, dal momento che possiamo scrivere uno stesso numero in più modi differenti, se scriviamo il minuendo in una forma che contenga lo stesso sottraendo al fine di "privare" proprio il sottraendo dal minuendo, otteniamo semplicemente il risultato per definizione. Supponiamo di effettuare la sottrazione (15 – 6) di figura 17:

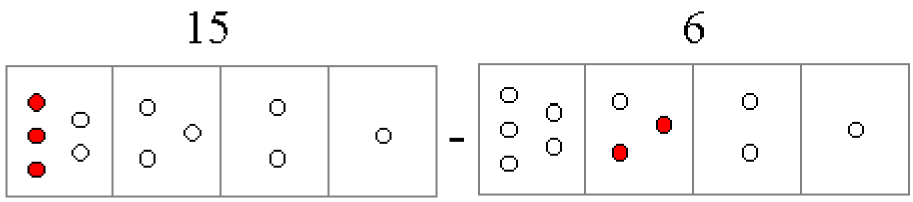

Figura 17

Sfruttando la possibilità di scrivere il numero 15 in diversi modi, scegliamo quello che "contiene il numero 6 scritto nella stessa forma assegnata (in realtà possiamo, se necessario, modificare anche il sottraendo per maggiore flessibilità)". L'operazione allora viene visualizzata come in figura 18 nella quale 2 cinquine del numero 15 sono sostituite da due terne e da due coppie. Una ellisse rossa circoscrive il sottraendo contenuto nel minuendo in modo da rendere corretta la sottrazione. "Ciò che resta" è, in sostanza, il minuendo privato del sottraendo, ossia il risultato 9. L'eccezionale valore del metodo si identifica nella possibilità di operare mediante la definizione invece che con l'uso della regola. Facendo un ulteriore esempio in riferimento alla figura 17, possiamo paragonare il numero 15 ad un insieme costituito da un cesto di una certa frutta e il numero 6 ad un insieme costituito da 2 mele. Siamo portati subito ad osservare che il paniere contiene tipi di frutta diversi

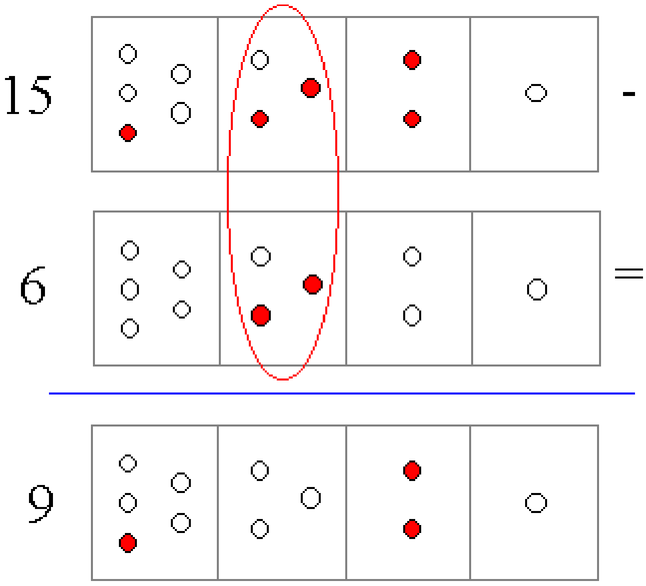

Figura 18

dalle 2 mele; è evidente, allora che, con la “nostra matematica” ci troviamo costretti ad usare la regola dei prestiti avviando un processo iterativo di calcolo per fare in modo che alla fine il risultato sia corretto. Nell’Abaco Inca (ma anche Maya ed Egizio) invece, prima di eseguire qualsiasi operazione, sfruttiamo la somiglianza consentita dalla ridondanza del codice proprio in virtù della libertà che abbiamo di scrivere un numero in diverse maniere e cambiamo la composizione della “frutta” nel cesto introducendo 2 “mele” in perfetta equivalenza. Togliere ora 2 mele da un cesto di frutta contenente anche 2 mele è una operazione di sottrazione assolutamente banale e che soprattutto può essere eseguita in un solo passo (logica EXOR applicata ai semi corrispondenti). In particolare sarà facilissimo istruire un bambino a eseguire correttamente l’operazione, così come sarà analogamente immediata “l’istruzione” di una macchina di calcolo basata però non su un sistema rigido come il binario, ma su una architettura ridondante che consenta l’applicazione della somiglianza. Se l’algoritmo risolve in un solo passo l’operazione, allora la velocità di esecuzione del relativo processo sarà massima e sicuramente maggiore della soluzione che rigidamente e iterativamente converge applicando le regole verso il risultato con un numero anche notevole di passi.

Proseguendo con la sottrazione, in caso di sottraendo maggiore del minuendo, cioè di risultato negativo, si fanno somigliare i due numeri ed il risultato è uguale esattamente al valore dei semi che mancano al minuendo per essere uguale al sottraendo, ovviamente con il segno negativo. La figura 19 descrive questo caso per l’operazione 9-16 (per semplicità è stata omessa la fase di somiglianza). Le ellissi rosse racchiudono i semi resi uguali e i cerchi blu i semi (di colore giallo) “prestati” al minuendo per ottenere l’uguaglianza visiva e corrispondenti quindi al risultato negativo (evidenziato in basso con i semi di colore giallo). Questi metodi sono sicuramente intuitivi e conducono velocemente al risultato. Messa a punto la sottrazione si potrebbe pensare di implementare la divisione con il metodo delle sottrazioni successive, ma è conveniente sfruttare ancora la ridondanza tramite la somiglianza. In primo luogo si rende il dividendo simile al divisore (o si modificano entrambi) in modo da massimizzare la somiglianza, si ottiene così il quoziente che è uguale al numero di volte che il divisore entra nel dividendo. Si tolgono infine tutti i semi del punto precedente ottenendo direttamente il resto della divisione. Questa non è altro che la definizione della divisione, ma nell’Abaco Inca si riesce a visualizzare proprio il concetto stesso di quoziente e di resto. In un utile esempio, le figure seguenti mostrano la divisione tra i numeri 45 e 19 che inizialmente sono scritti come nella figura 20. Ora le righe hanno effettivamente corrispondenza con l’esponente nella base 40 dato che un numero è maggiore di 39:

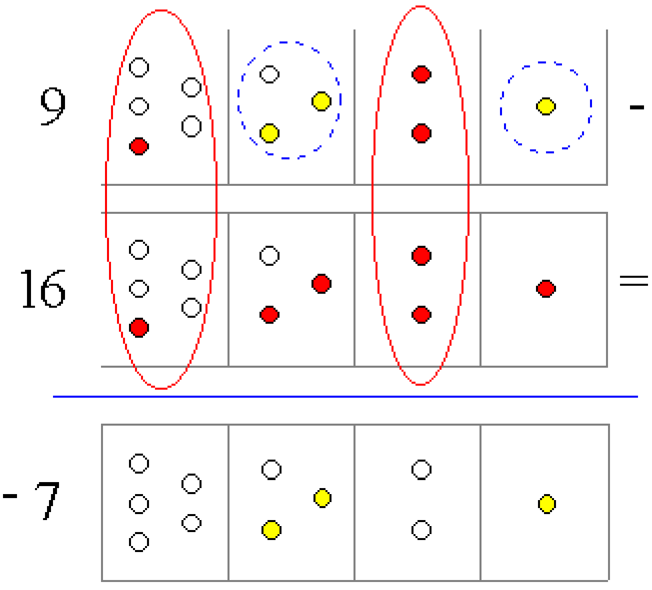

Figura 19

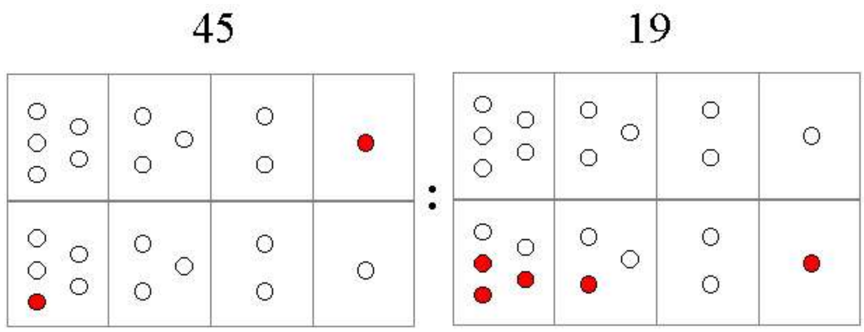

Figura 20

Attenendoci alla somiglianza si perviene alla situazione di figura 21. Il numero 45 (40+5) deve essere reso il più possibile simile al 19 invadendo le sue stesse caselle. Il seme di peso 40^1 viene tramutato in 39+1 e, dato che la massima capacità di una riga è uguale a 39, occorre riempire tutta la riga di peso 40^0 in senso canonico (5 cinquine, 3 terne, 2 coppie e una unità) e aggiungere una unità anche se deve essere superata la capacità massima delle caselle, in ogni caso sarà la normalizzazione a sistemare il risultato. Il 45 è scritto ora con 6 semi nelle cinquine (1 originario più 5 provenienti dal "trasloco" del 40), 3 terne, 2 coppie e 2 unità tutte provenienti dalla traslazione citata. Per maggiore chiarezza, nella figura 21 il dividendo ha i semi significativi di colore giallo, mentre il divisore di colore rosso. Contando ora il numero di volte che il divisore entra nel dividendo si ha il quoziente; le ellissi rosse evidenziano questa situazione dalla quale si ricava che il quoziente è 2. Scritto il quoziente, possono essere eliminati tutti i semi racchiusi nelle ellissi rosse e ciò che rimane non può che essere il resto della divisione (nella figura circoscritto da una ellisse di colore blu). Infatti sono rimaste fuori dalle ellissi rosse 2 coppie e 1 terna sempre di peso 40^0 per cui il resto vale 7 come deve essere dal momento che 45 diviso 19 fa 2 col resto di 7. Volendo procedere con le cifre dopo la virgola, si continua la divisione passando il resto alla riga superiore. Il quoziente della divisione successiva si riferisce alla riga di peso 40^{-1}; si continua così fino alla precisione voluta tenendo presente che i risultati ottenuti sono ovviamente in base 40 e che quindi il valore delle cifre quarantesimali tende molto rapidamente a essere trascurabile. Come si vede dalla figura 21, per applicare la somiglianza occorre talvolta superare la capacità massima delle caselle fermo restando la normalizzazione del risultato. Stesso discorso per l'Abaco Maya e quello Egizio viste le affinità strutturali.

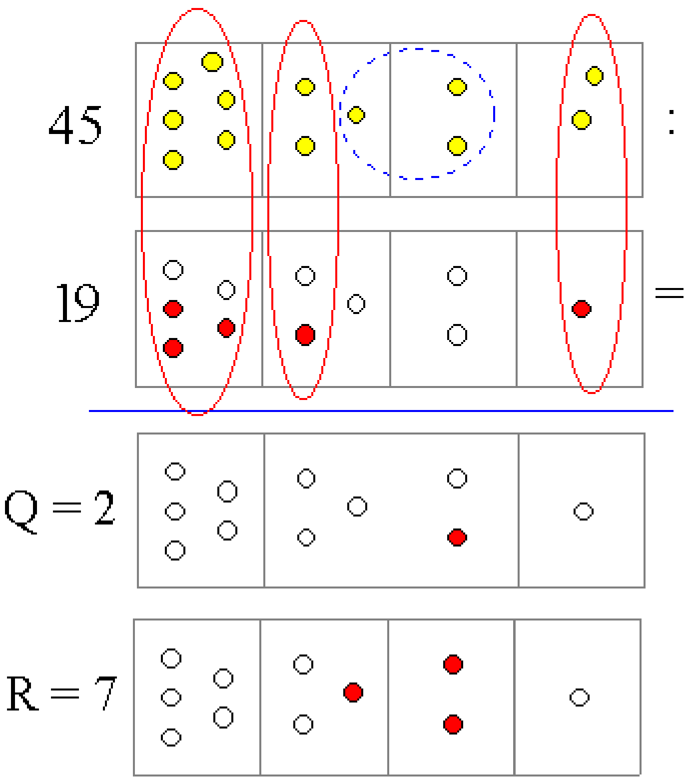

Figura 21

Nella divisione, come nella moltiplicazione, si può operare con le righe assolute considerando a parte l'esponente. In questo modo anche calcoli con numeri enormi risultano notevolmente semplificati. Nella divisione in particolare l'applicazione della proprietà distributiva permette ulteriori riduzioni di complessità. Negli esempi precedenti dividendo e divisore sono stati separati per chiarezza in abachi differenti, ma nelle operazioni manuali sperimentali l'uso di semi di colore diverso permette con un solo abaco di eseguire agevolmente tutte le operazioni sino al risultato finale. Applicando la somiglianza si semplificano talmente i calcoli che il rischio di commettere errori è praticamente nullo, come del resto evidenziato dallo stesso Acosta (*"sono capaci di completare i loro calcoli senza fare il più piccolo errore")*. L'Abaco Inca permette nelle operazioni l'applicazione diretta delle definizioni prescindendo dalle regole "meccaniche". Le prime considerazioni in campo didattico sono entusiasmanti perché gli allievi possono fisicamente e visivamente eseguire le operazioni servendosi delle definizioni stesse per un più efficace apprendimento. Inoltre, in riferimento alle architetture di calcolo, su un sistema ispirato all'Abaco Inca possono essere costruiti algoritmi di straordinaria semplicità e di insospettata efficacia direttamente e velocemente convergenti verso il risultato senza i lunghi processi iterativi che caratterizzano una filosofia numerica basata sulle regole. Ovviamente l'algoritmo di somiglianza riveste un ruolo fondamentale, ma si rimanda la sua presentazione ad un ulteriore specifico approfondimento. Il metodo è applicabile anche ad altri sistemi di numerazione, ma il sistema di Fibonacci risulta il più semplice e intuitivo.

Una risposta

Alla luce di queste considerazioni e rispondendo al primo quesito posto sui motivi per i quali gli Incas (ma anche Maya ed Egizi per le sorprendenti analogie) hanno utilizzato strumenti di calcolo con una base diversa da quella decimale, si può ora concretamente supporre che quella Civiltà abbia fatto ricorso a questo particolare sistema di numerazione ridondante e intrinsecamente "somigliante" proprio per ottenere il più semplice, preciso e infallibile strumento di calcolo. Questa ipotesi potrebbe essere confermata dal fatto che i risultati erano alla fine memorizzati nei quipus in base decimale secondo una evidente esigenza di praticità "fisiologica". Si può quindi ritenere molto probabile che questa scelta di pura convenienza operativa possa essere ampiamente giustificata da quanto esposto, solo che si pensi ai vantaggi dell'uso di questo sistema, in apparenza complesso e illogico, ma nei fatti capace di semplificare in misura incredibile tutte le operazioni aritmetiche.
L'Abaco Inca introduce nei calcoli la meravigliosa "fantasia" numerica della somiglianza rispetto alla quale la soluzione realizzativa in tecnica neurale è da preferire, per sfruttare al massimo la flessibilità e le potenzialità del sistema. Una rete neurale infatti, dopo essere stata istruita, è in grado di apprendere e di risolvere anche situazioni non previste in sede di programmazione (Hertz, 1991)

Oltre il sistema binario

Per la costruzione di macchine di calcolo abbiamo a disposizione un monopolio di tecnologie binarie più che consolidate, testate, dal costo estremamente contenuto e con un grado di affidabilità molto alto. Inoltre, data la massima semplicità del codice binario, si ottengono velocità di elaborazione molto elevate con contemporanea minima probabilità di errore anche in presenza di rumore o disturbi elettromagnetici. Di conseguenza abbiamo assistito ad una graduale affermazione delle tecniche digitali binarie praticamente in tutti i campi, dalle telecomunicazioni all'elaborazione dati, dalla registrazione audio a quella video, dai controlli automatici agli apparati di misura. Volendo realizzare dispositivi con qualsiasi altro sistema di numerazione occorre prima costruire ex novo tutti i componenti base sopportando altissimi costi. Possiamo acquistare processori binari a prezzi irrisori rispetto ai relativi costi di progettazione e costruzione perché tali componenti sono comuni a svariate applicazioni nei diversi campi e il loro costo diviene quindi particolarmente competitivo rispetto a dispositivi costruiti solo per una specifica applicazione. Il sistema binario quindi nel nostro mondo non è vincente per partito preso, ma per inevitabile scelta obbligata perché riesce a soddisfare in pieno le specifiche richieste al minimo costo.
Tuttavia recenti ricerche in campi particolari quali ad esempio le trasmissioni codificate, si prefiggono di superare le prestazioni offerte dal sistema binario classico introducendo nuovi sistemi di numerazione non pesati, a basi multiple o a base variabile. E' oltremodo singolare constatare che la maggioranza di questi nuovi sistemi utilizza pesi che appartengono proprio alla stessa successione di Fibonacci, esattamente come l'Abaco Inca. In particolare si sta notevolmente affermando la struttura denominata "Sistema di Numerazione di Fibonacci", caratterizzata da pesi

appartenenti alla nota successione e coefficienti binari; il numero di "bit" impiegati dipende dalle esigenze specifiche. Tale sistema è completo perché è in grado di rappresentare tutti i numeri interi. Anche questo particolare sistema "contemporaneo" è ridondante e la figura 22 evidenzia le diverse modalità di scrittura in riferimento al numero 24. E' significativo sottolineare però che la "ricchezza di rappresentazioni" che scaturisce dalla ridondanza, è "congelata" dallo specifico teorema di Zeckendorf che definisce per ogni numero una forma unica priva di "uno" adiacenti (per il numero 24 tale forma è evidenziata in rosso nella figura 22). I motivi per cui tale sistema è utilizzato sono diversi, nella teoria dei codici consente di minimizzare la lunghezza media dei numeri interi (Fenwick P.), nei sistemi DSP (Digital Signal Processing) permette di semplificare le operazioni di moltiplicazione e divisione (Dimitrov, *Faster multiplication of medium-sized integers via the Zeckendorf representation*). Si riportano di seguito (da fig. 23 a fig.27) esempi sulle interessanti modalità operative nell'aritmetica di Zeckendorf (Fenwick P. *Zeckendorf Integer Arithmetic*) relative a somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione, nelle quali però la ridondanza del codice non è sfruttata, ma rimossa tramite il citato teorema. Si ricorda che questo sistema di numerazione è interamente basato sulla successione di Fibonacci, mentre il sistema Inca la utilizza unicamente nel sistema "locale" per la formazione dei coefficienti del sistema "globale" a base 40.

21	13	8	5	3	2	1
	1	0	1	1	1	1
	1	1	0	0	1	1
	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0

Figura 22

…omissis…

Conclusioni

L'ipotesi secondo la quale gli Incas, ma per la perfetta analogia anche i Maya e gli Egizi, abbiano creato un così particolare sistema di numerazione basato sulla ridondanza e sulla somiglianza per semplificare i calcoli, è avvincente e anche in realtà persuasiva sotto molti punti di vista. E' opportuno riflettere sul fatto che la ridondanza nell'abaco implica la "libertà" di poter scegliere la rappresentazione più conveniente, mentre il nostro mondo avverte tale libertà come un "impedimento" conveniente da "rimuovere". Essendo i concetti antitetici, nasce spontaneo il sospetto che il nostro approccio sia limitato addirittura a monte degli aspetti prettamente numerici. Come esposto in merito all'Abaco Inca, la ridondanza nella rappresentazione si traduce invece in una serie di concreti vantaggi, ma potrebbe, in effetti, anche essere stata utilizzata con l'intento di aggiungere informazioni supplementari ai numeri, ossia potrebbe essere stato assegnato un significato diverso ad ogni seme anche nella stessa casella come si potrebbe dedurre da un attento esame della figura 1. Significato non solo quantitativo, non soltanto nel senso della cardinalità. Non dimentichiamo che la struttura dell'abaco è intimamente connessa con la struttura numerica dei fenomeni generativi e che la Civiltà Inca era in particolare sintonia con l'Ambiente. Ma se l'abaco fosse interpretabile anche in senso Qualitativo, nell'approccio saremmo fortemente condizionati dal nostro concetto alquanto limitato di Qualità. Il termine "qualità" infatti assume nel nostro mondo una miriade di significati e di valenze, di cui la maggioranza è però riconducibile direttamente alla quantità oppure si riferisce ad aspetti limitati e di importanza non primaria. Infatti quando parliamo, ad esempio, di qualità della vita introduciamo parametri come i metri quadrati di verde per abitante, o come il livello di rumore nelle strade, tutti aspetti quantificabili. La certificazione di "qualità" (v. Iso 9000) valuta l'osservanza di procedure e non si riferisce affatto alla "qualità" nemmeno nel senso comune del termine. Definiamo e misuriamo la qualità dell'energia elettrica come mancanza di blackout e bassa distorsione dell'onda prodotta, indipendentemente da ciò che bruciamo per ottenerla, trascurando i gravissimi danni arrecati all'Ambiente. Siamo capaci inoltre di sperperare per pochi spiccioli di energia una fonte preziosa come il petrolio che in realtà è il frutto di milioni di

anni di irraggiamento solare e, ancora peggio, utilizziamo questa energia con un rendimento medio globale bassissimo (circa il 5%), inferiore al rendimento di un fuoco di rami secchi acceso per scaldare la caverna di un uomo preistorico (Orlando, 2003). Per le "qualità" di un seme facciamo prevalentemente riferimento ai contenuti nutrizionali, al basso residuo di inquinanti, tutti aspetti sempre e comunque quantificabili, mentre se avessimo chiesto a un uomo Inca le principali Qualità di un seme, di certo avrebbe risposto: la possibilità di riprodursi e di essere conservato e tramandato per anni nello stato di semente. E' chiaro che anche noi conosciamo bene queste nobili caratteristiche, ma poi è sconcertante constatare che la nostra civiltà, di fronte a questa Qualità di primaria importanza, abbia avuto la "sensibilità" di "fabbricare" sementi capaci a loro volta di produrre semi sterili, come nel caso degli OGM (organismi geneticamente modificati) spogliati della fondamentale proprietà di riprodursi, per cui un agricoltore non può più seminare, ad esempio, il grano che ha raccolto.
Non è un caso allora che le nostre prime aspettative, in merito alle ricerche sull'abaco, siano quelle di aumentare le prestazioni dei sistemi di calcolo, in senso unicamente quantitativo a cominciare dalla velocità di elaborazione dei dati. Abbiamo difficoltà a gestire la ridondanza che è, come detto, interpretata da noi come "eccedenza di quantità" e quindi "spreco" invece che ricchezza, ed infatti è in chiave di spreco (e non ricchezza) che gestiamo le nostre "eccedenze di quantità" come l'acqua, i rifiuti, l'energia, le risorse naturali in generale.
E se l'abaco permettesse di elaborare anche una "eccedenza di Qualità" (Giannantoni, 2002) la nostra civiltà incontrerebbe ancora più difficoltà ad interpretarla a causa proprio del "condizionamento quantitativo" che caratterizza il nostro tempo. Molto più che inseguire prestazioni misurabili e per le quali la filosofia del "calcolo parallelo" costituisce già una eccellente prospettiva, sarebbe ora importante creare un nuovo elaboratore capace di effettuare "calcoli di Ordo-cardinalità" (cfr. Giannantoni, infra) dotato non solo di un "cervello", ma soprattutto di un "cuore" in simbiosi con l'Ambiente per avere risposte certe, ad esempio, sulle conseguenze dei gas-serra sul futuro del pianeta.
Per proseguire nell'esplorazione dell'abaco quindi, è per noi essenziale l'astrazione non solo dai primi due condizionamenti citati precedentemente (decimale e binario), ma anche da quest'ultimo (e non per questo meno "oscurante") legato alla nostra visione della Qualità troppo coincidente con un riduttivo concetto di "buona quantità".
Sul piano sia quantitativo che Qualitativo, l'Abaco e tutta la Civiltà Inca possono costituire una preziosa fonte di ispirazione, un valido modello non solo numerico e uno specchio per guardare dentro e fuori di noi.

Maurizio Orlando

m.orlando@quipus.it
www.quipus.it

Bibliografia

- ✔ Acosta José de, 1954 [1590], *Historia Natural y Moral de las Indias*, in: J. de Acosta, Obras, Atlas, Madrid, pp. 3-247.
- ✔ Apostolico A. & Fraenkel A. S. 1987, *Robust transmission of unbounded strings using Fibonacci representations*, IEEE Trans. on Inf. Th. IT{33 (1987)), pp 238-245
- ✔ De Pasquale N., 2001. *Il Volo del Condor,* "Pescara Informa"*,* Rivista dell'Ordine degli Ingegneri di Pescara. Ed. Sigraf, Pescara. Ottobre.
- ✔ De Pasquale N., 2003. *I Giochi di Imenmes,* "Pescara Informa"*,* Rivista dell'Ordine degli Ingegneri di Pescara. Ed. Sigraf, Pescara. Luglio.
- ✔ Dimitrov V., Donevsky B., 1995. *Faster multiplication of medium-sized integers via the Zeckendorf representation, The Fibonacci Quarterly*, vol.33, pp.74-77.
- ✔ Dimitrov V., Saeid Sadeghi-Emamchaie, Jullien G.A. and Miller W.C., *A Near Canonic Double-Based Number System (DBNS) with Applications in Digital Signal Processing,* VLSI Research Group, University of Windsor, Windsor, ON, Canada N9B 3P4
- ✔ Dimitrov V. and Cooklev T., 1995. *Two algorithms for modular exponentiations using non standard arithmetic*, IEICE Trans.Fundam., vol.E78-A,pp.82-87.
- ✔ Dimitrov V.S., Jenkins W. K., Fellow G.A. Jullien, Senior Member, *Residue Arithmetic With Applications in Digital Signal Processing.*
- ✔ Drmota M., Steiner W., *The Zeckendorf Expansion of Polynomial Sequences*, Department of Geometry, Technische Universität Wien, Austria.
- ✔ Fenwick P., *Zeckendorf Integer Arithmetic*, Department of Computer Science, The University of Auckland. Auckland, New Zealand.
- ✔ Fraenkel A.S., 1985. *Systems of numeration*, American Mathematical Monthly, vol.92, no.2, pp.105-114. Feb.
- ✔ Fraenkel S. & Klein S. T. 1996, *Robust universal complete codes for transmission and compression*, Discrete Applied Mathematics 64. pp 31-55
- ✔ Freitag H.T., Phillips G.M., 1998. "*Zeckendorf arithmetic"*. Applications of Fibonacci Numbers Vol 7, pp129–132 G E Bergum, A N Philippou and A F Horadam (Eds.), Kluwer, Dordrecht.
- ✔ Frougny C., 1991. *Fibonacci Representations and Finite Automata,* IEEE Trnsaction on Information Theory, Vol 37. N. 2. March
- ✔ Frougny C., 1992. *Representations of numbers and finite automata*, Mathematical System Theory, vol.25, pp.37-60
- ✔ Frougny C., Sakarovitchz J., 1998. *Automatic conversion from Fibonacci representation to representation in base φ*. Université Paris 8, Laboratoire Informatique Algorithmique.
- ✔ Giannantoni C., 2002*. The Maximum EM-Power Principle,* University of Florida, USA.
- ✔ Hertz J., Krogh A., Palmer R.G., 1991. *Introduction to the Theory of Neural Computation.* Addison-Wesley, Redwood City, Calif. Usa.
- ✔ Knott Ron, 2003. *Fibonacci Numbers and Nature*, Web Site (and Brantacan Site).
- ✔ Mintz D.J.,1981. *Sequence as a Binary Mixture, The Fibonacci Quarterly,* vol. 19, pp. 351-360.
- ✔ Micheli Pellegrini V. Comunicazione personale.
- ✔ Orlando M., 2002. *La Calculadora Atahualpa*, "Pescara Informa"*,* Rivista dell'Ordine degli Ingegneri di Pescara. Ed. Sigraf, Pescara. Ottobre.
- ✔ Orlando M., 2003. *La Qualità dell'Energia nella Civiltà dell'Idrogeno*, IdrogenoExpo. Milano.
- ✔ Snijders C.J.1985. *La sezione aurea. Arte, natura, matematica, architettura e musica.* Muzzio. PD
- ✔ Tee Garry J., *Russian Peasant Multiplication and Egyptian Division in Zeckendorf Arithmetic.* Department of Mathematics, University of Auckland, New Zealand.
- ✔ Yacoub M. and Saudi A., 1993. *Recurrent Neural Networks and Fibonacci Numeration System*, Proceedings of 1993 International Joint Conference on Neural Networks.
- ✔ Watanuki O. and Ercegovac M.D., 1981. *Floating-point on-line arithmetic algorithms*, Proc. of 5th IEEE Symp. on Computer Arithmetic, pp. 92-98. May.
- ✔ Zeckendorf E., 1972. *Répresentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas*. Bull. Soc. Royale des sciences de Liège, 3-4, p. 179-182.